



3

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية

الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Calcul intégral	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, et suites numériques	9 points

- ✓ In désigne la fonction logarithme népérien

		<p>Exercice 1 : (3 points)</p> <p>Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2, 1, 2)$ et de rayon 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1, 0, 3)$ et dont $\vec{u}(4, 0, -3)$ est un vecteur normal .</p> <p>0.5 1) Montrer qu'une équation de (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$</p> <p>0.5 2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (P) est $4x - 3z + 13 = 0$</p> <p>0.5 3) a) Vérifier que $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P)</p> <p>0.5 b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P)</p> <p>0.25 4) a) Calculer $d(\Omega, (P))$</p> <p>0.75 b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera .</p>
		<p>Exercice 2 : (3 points)</p> <p>0.75 1) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$</p> <p>2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}), on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2}(1 - i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$</p> <p>0.25 a) Ecrire a sous forme trigonométrique.</p> <p>0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$</p> <p>0.5 3) a) On considère le point C d'affixe $c = 1 + i$, montrer que $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$</p> <p>0.5 b) Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{OC} et D l'image du point B par la translation t Montrer que $OD = b + c$</p> <p>0.5 c) En déduire que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$</p>
		<p>Exercice 3 : (3 points)</p> <p>Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1 , et 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2 , et 6 boules de couleur verte portant chacune le nombre 2</p> <p>On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :</p> <p>A : "Obtenir deux boules portant le même nombre " ;</p> <p>B : "Obtenir deux boules de couleurs différentes "</p> <p>C : "Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3"</p>

1.5	1) Montrer que $p(A) = \frac{13}{22}$ et $p(B) = \frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$
0.5	2) a) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$
0.5	b) Les événements A et B sont – ils indépendants ? Justifier la réponse.
0.5	3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même nombre .
Exercice 4 : (2 points)	
0.5	1)a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur \mathbb{R}
0.5	b) En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$
1	2) En utilisant une intégration par parties , calculer $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$
Problème : (9 points)	
I) Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$ Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$	
0.25	1) Calculer $g(1)$
0.5	2) A partir de ce tableau , déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1, +\infty[$
II) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$	
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})	
0.5	1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
0.5	b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$
0.25	c) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C)
0.75	2) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.
1	3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$
0.5	b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$
0.5	c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$
1	4) Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (C) (unité : 1 cm)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$



0.25	<p>III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$</p> <p>1) a) Vérifier que $h(1) = 0$</p>	
0.75	<p>b) Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h</p> <p>Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$</p>	
0.75	<p>2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :</p> <p>$u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}</p>	
0.75	<p>a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de \mathbb{N}</p>	
0.75	<p>b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante . (On pourra utiliser le résultat de la question III)1)b))</p>	
0.75	<p>c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .</p>	